

Examen fin du 1^{er} semestre en Analyse

Date: 05/01/2024 _____ Durée: 2h _____ Nombre de pages: 2

• **NB** Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.

Problème 1 (10 points)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $U_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + U_n^2$.

§ Partie 1

- (1) (a) Déterminer la monotonie de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + x^2$. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \frac{-1}{4}$ puis donner le signe de $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (2) En déduire que:
 - (a) Si $a \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$ et la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente vers $+\infty$.
 - (b) Si $a \in [-1, 0]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$ et la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers une limite que l'on précisera.

§ Partie 2

Supposons dans cette partie que $a > 0$ (alors d'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$) et on considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{1}{2^n} \ln(U_n)$.

- (1) (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{U_n}\right)$.
- (b) En déduire la monotonie de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (2) (a) Montrer que: $\forall n, k \in \mathbb{N}, 0 < V_{n+k+1} - V_{n+k} \leq \frac{1}{2^{n+k+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{U_n}\right)$.
- (b) En déduire que: $\forall n, p \in \mathbb{N}, 0 < V_{n+p+1} - V_n \leq \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{U_n}\right)$.
- (c) Déduire alors que:
 - (i) La suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
 - (ii) La suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers un réel noté λ et que $\lambda > 0$.
- (3) (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq \exp(\lambda 2^n)$.
- (b) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \exp(\lambda 2^n) - 1 \leq U_n$. **Ind.** Utiliser la question (2)(b) en prenant $n \in \mathbb{N}$ et en passant à limite lorsque $p \rightarrow +\infty$.
- (c) En déduire que: $U_n \sim \exp(\lambda 2^n)$.
- (4) On considère la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \exp(\lambda 2^n) - U_n$.
 - (a) Vérifier que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
 - (b) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, 2W_n - 1 = (W_{n+1} + W_n^2 - W_n) \exp(-\lambda 2^n)$.
 - (c) En déduire que: $U_n = \frac{-1}{2} + \exp(\lambda 2^n) + o(1)$.

Problème 2 (10 points)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et posons $I = [a, b]$. Une application $f : I \rightarrow I$ est dite **sup-stable** si pour toute partie A non vide de I , on a: $f(\sup(A)) = \sup(f(A))$.

§ Partie 1

Soient une application $f : I \rightarrow I$ et une partie A non vide de I .

- (1) Justifier que $\sup(A)$ et $\sup(f(A))$ existent et appartiennent à I .
- (2) Montrer que si f est sup-stable, alors f est croissante. **Ind.** pour $x \leq y$, utiliser l'ensemble $A_0 = \{x, y\}$.
- (3) (a) Montrer que si f est croissante, alors $\sup(f(A)) \leq f(\sup(A))$.
(b) Donner un exemple d'une application $\varphi : I \rightarrow I$ qui est croissante mais qui n'est pas sup-stable.
- (4) Montrer que si f est sup-stable et bijective, alors sa fonction réciproque f^{-1} est aussi sup-stable.
- (5) Soit une autre application $g : I \rightarrow I$. Montrer que si f et g sont sup-stables, alors l'application $g \circ f$ est aussi sup-stable.

§ Partie 2

On considère une application $f : I \rightarrow I$ **croissante** et les ensembles suivants: $F = \{x \in I; f(x) = x\}$, $G = \{x \in I; f(x) \leq x\}$ et $H = \{f^n(a); n \in \mathbb{N}\}$ où $f^0 = id_I$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

- (1) (a) Justifier que $G \neq \emptyset$ puis montrer que $f(G) \subseteq G$.
(b) Montrer que G admet un élément minimum que l'on notera λ .
(c) Montrer que $\lambda \in F$ puis déduire que $\lambda = \min(F)$.
- (2) (a) Justifier que $\sup(H)$ et $\sup(f(H))$ existent et appartiennent à I .
(b) On pose $\beta = \sup(H)$ et $\gamma = \sup(f(H))$. Vérifier que $H = \{a\} \cup f(H)$ puis montrer que $\beta = \gamma$.
- (3) (a) Vérifier que λ est un majorant de H .
(b) Supposons ici de plus que f est **sup-stable**. Vérifier que $\beta \in F$.
(c) Supposons ici de plus que f est **continue**. En utilisant la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = f^n(a)$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \beta$ puis $\beta \in F$.
(d) En déduire que dans chacune des deux situations (b) et (c) précédentes, on a: $\beta = \lambda$.

Bon travail